Concours d'Elève-Ingénieur de la Ville de Paris
ouvert le 24 avril 1985

1ère épreuve de mathématiques (commune)
durée 4 heures coéfficient 8

Les deux problèmes sont indépendants

1er problème

Partie I :

A tout réel a, on associe la fonction réelle d'une variable réelle $f_a(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-a}}$. Soit C_a la courbe représentative de f_a.

1/ Indiquer pour quelles valeurs de x, $f_a(x)$ est définie.

2/ Dresser, en fonction de a, les différents tableaux de variation de f_a.

3/ Etudier les branches infinies de C_a

4/ Rechercher les éventuels points d'inflexion de C_a

5/ Trouver la courbe Γ décrite par le point à tangente horizontale de C_a lorsque a varie.

6/ Construire sur un même graphique, avec des échelles non forcément identiques sur Ox et Oy, les courbes C_{-1}, C_0, C_1, Γ.

Partie II :

1/ Démontrer que pour tout $x > a$ l'intégrale $\int_a^x f_a(t)\,dt$ converge. Démontrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f_a(t)\,dt$ diverge.

2/ Déterminer deux réels α et β tels que

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x-a}} - \sqrt{x}\,(\alpha x + \beta) \right] = 0$$

Quelle est la nature de l'intégrale

$$\int_A^{+\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x-a}} - \sqrt{x}\,(\alpha x + \beta) \right] dx$$

où A est réel strictement supérieur à a et 0 ?

3°/ Déterminer un réel γ tel que l'intégrale

$$\int_A^{+\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x-a}} - \sqrt{x}\left(\alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x}\right) \right] dx \text{ soit convergente}$$

4°/ Calculer $I_n = \int_a^n \frac{x^2}{\sqrt{x-a}}\,dx$ pour n entier

strictement supérieur au paramètre a.

5°/ Soit $S_n = \sum_{k=N+1}^{n} \frac{k^2}{\sqrt{k-a}}$ où N est un entier

strictement supérieur à $\left|\frac{4a}{3}\right|$ Montrer que $\lim S_n = +\infty$

Etablir la double inégalité

$$I_{n+1} - I_N + 1 \geqslant S_n \geqslant I_n - I_N$$

En déduire un équivalent de Sn lorsque $n \longrightarrow +\infty$

2ème problème N.B. Les parties I, II, III sont indépendantes

Soit A une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels, de terme général a_{ij} où i est l'indice de ligne et j l'indice de colonne.

On désignera par λ_1, λ_2, λ_3 ses valeurs propres réelles ou complexes, distinctes ou confondues.

On posera $Tr(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}$

Partie I

1/ Démontrer que l'une au moins des valeurs propres de A est réelle

2/ Soit A^2 le carré de la matrice A. Démontrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, λ_i^2 est valeur propre de A^2.

Réciproquement, si μ est une valeur propre de la matrice A^2, démontrer que l'une au moins des racines carrées dans $\mathbb{C}$ de μ est de valeur propre de A.

Partie II

On suppose dans cette partie que A satisfait à la condition

(1) $\exists k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $Tr(A) = k$ et $Tr(A^2) = k^2$

1. Démontrer que A admet au moins une valeur propre λ_1 réelle non nulle

2. On suppose $\lambda_1 \geq k$

a) Démontrer que les deux autres valeurs propres λ_2 et λ_3 sont non - réelles ou nulles

b) Démontrer que $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ et $|\lambda_3| < |\lambda_1|$

Partie III

On suppose dans cette partie que A satisfait à la condition (2)

(2) $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ a $i\ j \in \mathbb{R}^{+*}$ et $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$

1°/ On suppose de plus pour cette question A non inversible

a) Déterminer les valeurs propres de A

b) Démontrer que les vecteurs colonnes de A sont vecteurs propres de A et préciser la valeur propre associée.

2°/ Démontrer que si A est inversible, alors elle admet une seule valeur propre réelle λ_1 et que $\lambda_1 > 3$

En déduire que $|\lambda_2| < \lambda_1$ et $|\lambda_3| < \lambda_1$

3°/ Démontrer que A est inversible si et seulement si 3 n'est pas valeur propre.